Chapitre 5

Nombres complexes

Plan du chapitre

1 L'ensemble $\mathbb{C}$, le nombre i

1.1 Ensemble $\mathbb{C}$

On admet l'existence d'un nombre, noté i, qui vérifie $\boxed{i^2 = -1}$. Ce nombre i n'est pas dans $\mathbb{R}$, car tout carré d'un réel est positif.

On peut construire [1] un ensemble $\mathbb{C}$, qui contient $\mathbb{R}$ et i, et sur lequel on peut définir des opérations (addition, soustraction, multiplication, division...) qui "ressemblent" à celles des réels.
Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés (nombres) complexes. On les désigne en général par la lettre z.

Définition 5.1

On définit l'ensemble des (nombres) complexes, noté $\mathbb{C}$, par l'ensemble

$$\mathbb{C} = \left\{a + ib \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Ainsi, tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1.2 Forme algébrique

On admet que l'écriture obtenue ci-dessus est *unique*, càd

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists \boxed{!} (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad z = a + ib$$

L'écriture de z sous la forme $z = a + ib$ est dite la forme algébrique de z. Étant donné un complexe z, les réels a et b correspondant sont donc déterminés de manière unique. Cela justifie la définition suivante.

Définition 5.2

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

- Le réel a, noté $\mathrm{Re}z$, est appelé la partie réelle de z.
- Le réel b, noté $\mathrm{Im}z$, est appelé la partie imaginaire *de* z.

Attention : $\mathrm{Re}z$ et $\mathrm{Im}z$ sont des ***réels*** (et pas des complexes !). Par ailleurs, on a toujours $z = \mathrm{Re}z + i\,\mathrm{Im}z$.

Propriété 5.3

Soit $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} z = a + ib \\ z' = a' + ib' \end{cases}$ deux complexes. Alors $z = z'$ si et seulement si z et z' ont les mêmes parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} z = z' &\iff a + ib = a' + ib' \\ &\iff \left(a = a' \text{ et } b = b'\right) \\ &\iff \left(\mathrm{Re}z = \mathrm{Re}z' \text{ et } \mathrm{Im}z = \mathrm{Im}z'\right) \end{aligned}$$

Démonstration. Cela découle de l'unicité de l'écriture sous forme algébrique qu'on a admise précédemment. □

Remarque. L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R} = \{a + 0i \mid a \in \mathbb{R}\}$$

On note aussi

$$i\mathbb{R} := \{0 + ib \mid b \in \mathbb{R}\}$$

Si $z \in i\mathbb{R}$, on dit que z est un imaginaire pur.

1. Mais la construction rigoureuse est hors-programme

Propriété 5.4 (Caractérisation des réels et imaginaires purs par Re et Im)

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im} z = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re} z = 0$

Ainsi tout réel peut être vu comme un complexe dont la partie imaginaire est nulle :

$$1 = 1 + 0i \in \mathbb{C} \qquad 0 = 0 + 0i \in \mathbb{C} \qquad -\pi = -\pi + 0i \in \mathbb{C}$$

2 Opérations avec les complexes

2.1 Opérations $+, -, \times, /$

Les opérations $+, -, \times, /$ entre complexes sont assez naturelles : tout se passe comme si on calculait dans $\mathbb{R}$ avec la règle $i^2 = -1$. Cependant, lorsqu'on fait des calculs avec des complexes, il faut prendre soin à écrire le résultat final sous une forme “exploitable” : forme algébrique ou forme trigonométrique (qu'on verra plus loin).

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux complexes mis sous forme algébrique. On définit les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + ib) + (a' + ib') \\ &= (a + a') + i(b + b') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z - z' &= (a + ib) - (a' + ib') \\ &= (a - a') + i(b - b') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zz' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + iab' + iba' + i^2 bb' \\ &= \left(aa' - bb'\right) + i(ab' + ba') \end{aligned}$$

et si $z' \neq 0$, c'est-à-dire $(a', b') \neq (0, 0)$,

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'} = \dots \quad \text{(on verra plus tard comment le mettre sous forme algébrique)}$$

Les règles de calcul sont en tout point similaires à $\mathbb{R}$:

$$z + z' = z' + z \qquad zz' = z'z$$

$$z(z' + z'') = zz' + zz''$$

$$0 \times z = 0 \qquad 1 \times z = z$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on notera

$$z^n := \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} z & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \text{ et } z \neq 0 \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{|n|} \frac{1}{z} & \text{si } n \leq -1 \text{ et } z \neq 0 \end{cases}$$

Pour 0^0, la situation est la même que dans $\mathbb{R}$: on n'a pas le droit de l'écrire a priori.

Exemple 1. Calculer :

$i^3 = \dots$	$i^4 = \dots$	$i^5 = \dots$
$i^6 = \dots$	$(-i)^2 = \dots$	$(-i)^3 = \dots$
$(a+ib)^2 = \dots$	$(a-ib)^2 = \dots$	$(a+ib)(a-ib) = \dots$

La dernière ligne ressemble à des identités remarquables, mais attention ! Il faut absolument avoir isolé parties réelles et parties imaginaires pour les appliquer. Ainsi, si par exemple on veut calculer $(z+z')^2$, il vaut mieux écrire $z+z'$ sous forme algébrique puis utiliser la formule ci-dessus :

$$\begin{cases} z = 2+i \\ z' = -1-3i \end{cases} \implies (z+z')^2 = \dots$$

Propriété 5.5 (Linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire)

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ et λ un ***réel***. Alors

$$\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}z + \mathrm{Re}z' \qquad \mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}z$$
$$\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}z + \mathrm{Im}z' \qquad \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}z$$

2.2 Formules de sommation

Comme dans les réels, si en développant une somme $\sum_{\dots}^{\dots} \dots$, on doit écrire z^0, on écrira 1 à la place. Les formules sommatoires du chapitre précédent se généralisent à des nombres complexes :

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ n+1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u, v \in \mathbb{C}$.

$$u^n - v^n = (u-v) \sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-1-k} \qquad (\text{avec la convention } 0^0 = 1)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u, v \in \mathbb{C}$.

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k} \qquad (\text{avec la convention } 0^0 = 1)$$

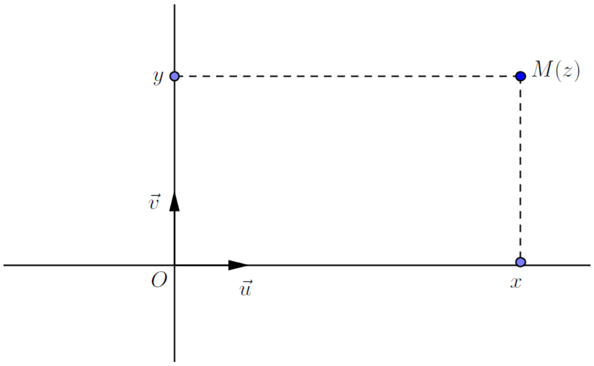
La démonstration de ces résultats est identique au cas réel. Ce sera souvent (mais pas toujours) le cas avec les complexes.

2.3 Aparté : interprétation géométrique

On appelle plan complexe le plan usuel avec un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe le complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe de M et on note $M(z)$ pour désigner ce point.

Réciproquement M est appelé l'image de z dans le plan complexe.



2.4 Conjugué

Définition 5.6

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit le conjugué de z, noté $\overline{z}$, comme étant le complexe

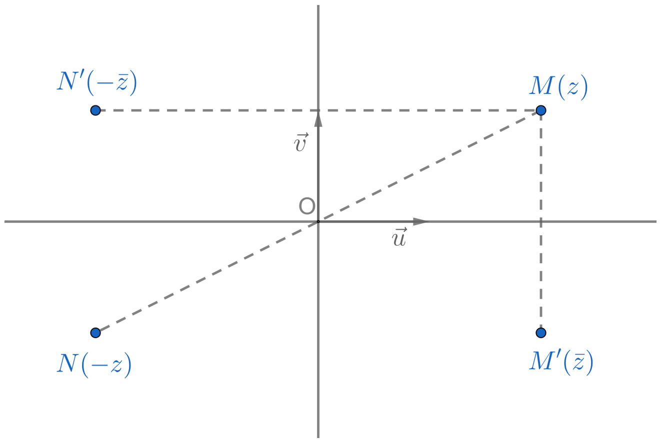
$$\overline{z} = a - ib$$

Soit $M(z)$ un point du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe $(O\vec{u})$.

Le point N d'affixe $-z$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'origine O.

Un point N' d'affixe $-\overline{z}$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe $(O\vec{v})$.



Propriété 5.7

Soit $z, u, v \in \mathbb{C}$. On a les relations suivantes :

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $$\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v} \qquad \overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v} \qquad \text{et si } v \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
4. $\mathrm{Re}\overline{z} = \mathrm{Re}z$ et $\mathrm{Im}\overline{z} = -\mathrm{Im}z$
5. $$\frac{z+\overline{z}}{2} = \mathrm{Re}z \qquad \frac{z-\overline{z}}{2i} = \mathrm{Im}z$$

Démonstration. Par l'interprétation géométrique, excepté les propriétés avec une multiplication ou une division, où il faut passer par la forme algébrique. □

Propriété 5.8 (Caractérisation des réels et imaginaires purs par le conjugué)

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$

3 Module

3.1 Définition et interprétation géométrique

Définition 5.9

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle module de z, noté $|z|$, le réel

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

Cette notation est cohérente avec la valeur absolue : si $z = a + 0i \in \mathbb{R}$, son module et sa valeur absolue coïncident et valent tous les deux $\sqrt{a^2}$.

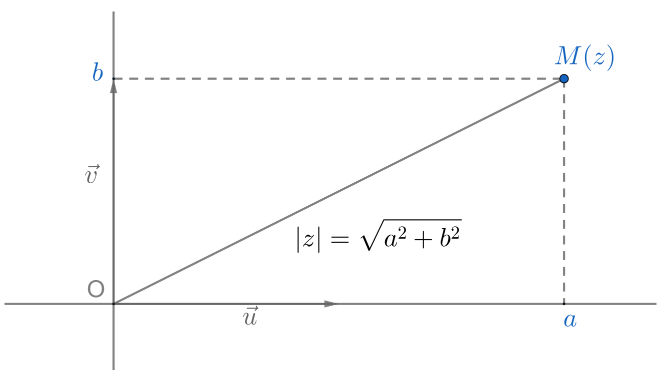
Exemple 2. Calculer les modules suivants :

$$|i| = \dots \qquad |-3| = \dots \qquad |-3+2i| = \dots$$

Soit $M(z)$ un point du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On peut interpréter $|z|$ comme étant la distance OM, notée également $||\overrightarrow{OM}||$.

Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points du plan complexe, on définit l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le complexe $z_B - z_A$. Ce vecteur aura pour norme $|z_B - z_A|$.



On notera que, comme l'origine O a pour affixe 0, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a bien pour norme $|z - 0| = |z|$.

3.2 Écriture algébrique de $\frac{1}{z}$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a :

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Si $z \neq 0$, alors $|z| \neq 0$ et on peut écrire

$$z \times \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

Cela permet de définir le complexe $\frac{1}{z}$ et de trouver facilement son écriture algébrique :

Définition 5.10 (Inverse et division de nombres complexes)

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ et $z = a+ib \in \mathbb{C}$. Si $z \neq 0$, alors on définit

$$\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

De plus, pour tout $w \in \mathbb{C}$, on pose $\dfrac{w}{z} := w \times \dfrac{1}{z}$.

Méthode

Soit $u,v \in \mathbb{C}$. Pour mettre le complexe $\dfrac{u}{v}$ sous forme algébrique, il faut multiplier numérateur et dénominateur par $\bar{v}$:

$$\frac{u}{v} = \frac{u\bar{v}}{v\bar{v}} = \frac{u\bar{v}}{|v|^2} = \frac{\mathrm{Re}(u\bar{v})}{|v|^2} + i\frac{\mathrm{Im}(u\bar{v})}{|v|^2}$$

Exemple 3. Mettre sous forme algébrique :

$$\frac{1+4i}{3-2i} = \dots$$

3.3 Propriétés du module

Propriété 5.11 (Propriétés du module)

Pour tous $z,u,v \in \mathbb{C}$,

1. $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $|\bar{z}| = |z| = |-z|$
3. $z\bar{z} = |z|^2$
4. $|\mathrm{Re}z| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}z| \leq |z|$
5. $|uv| = |u|\,|v|$
6. Si $v \neq 0$, $\quad \left|\dfrac{u}{v}\right| = \dfrac{|u|}{|v|}$
7. Identité remarquable :
$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\mathrm{Re}(u\bar{v})$$
8. **Première inégalité triangulaire** :
$$|u+v| \leq |u| + |v|$$
Cas d'égalité : $|u+v| = |u|+|v|$ si et seulement si $v = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad u = \lambda v$.
9. **Seconde inégalité triangulaire :**
$$\big||u|-|v|\big| \leq |u-v|$$

Démonstration. Les propriétés 1 à 6 se démontrent en passant par la forme algébrique (mais l'interprétation géométrique aide à se souvenir de la plupart).

- Montrons **7** :

$$\begin{aligned}|u+v|^2 &= (u+v)\overline{(u+v)}\\ &= (u+v)(\overline{u}+\overline{v})\\ &= |u|^2+|v|^2+u\overline{v}+\overline{u}v\\ &= |u|^2+|v|^2+u\overline{v}+\overline{u\overline{v}}\\ &= |u|^2+|v|^2+2\mathrm{Re}(u\overline{v})\end{aligned}$$

- Montrons **8** (sans cas d'égalité). D'une part, par la propriété 7

$$|u+v|^2 = |u|^2+|v|^2+2\mathrm{Re}(u\overline{v})$$

  et d'autre part

$$(|u|+|v|)^2 = |u|^2+|v|^2+2|u|\,|v|$$

  Or, par 4, on a $\mathrm{Re}(u\overline{v}) \leq |\mathrm{Re}(u\overline{v})| \leq |u\overline{v}| = |u|\,|v|$. Ainsi

$$0 \leq |u+v|^2 \leq (|u|+|v|)^2$$

  et en passant à la racine carré, qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit l'inégalité voulue.

-

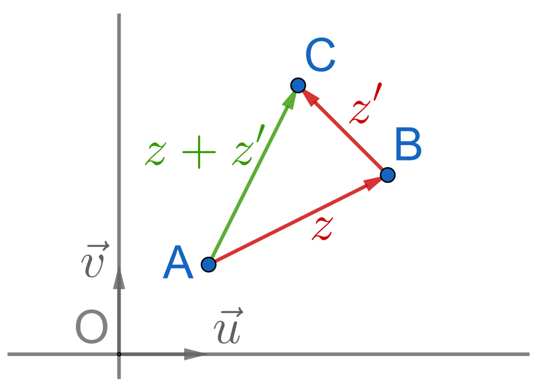
- La seconde inégalité triangulaire se démontre à partir de la première, comme avec la valeur absolue (cf chapitre précédent).

□

Soit A, B, C trois points du plan complexe. Si z est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ et z' celui de $\overrightarrow{BC}$ alors $z+z'$ est l'affixe de $\overrightarrow{AC}$.

L'inégalité triangulaire $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ exprime simplement le fait que la distance AC est inférieure à $AB+BC$, où que soit B.

Il y a égalité entre ces distances ssi B est sur le segment $[AC]$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont alors la même "direction" et on retrouve que $z = \lambda z'$ avec $\lambda \geq 0$ (ou $z' = 0$ et alors $B = C$).



/ !\ NE JAMAIS écrire d'inégalités avec des complexes / !

Si $z \in \mathbb{R}$, on peut écrire "$z \leq \dots$" ou "$z \geq \dots$". Ce n'est plus le cas si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Par exemple on ne doit pas écrire $\cancel{4i \geq 2i}$. De même, le signe d'un complexe n'a aucun sens.
Comme le module est un réel, toutes les inégalités qu'on a écrites plus haut ont un sens. Pour écrire qu'un complexe est un réel positif, plutôt que d'écrire $z \geq 0$, mieux vaut écrire $z \in \mathbb{R}_+$.

Propriété 5.12 (Caractérisation des réels et imaginaires pur par le module)

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $z \in \mathbb{R}_+ \iff z = |z|$
- $z \in \mathbb{R}_- \iff z = -|z|$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = i|z|$ ou $z = -i|z|$

Propriété 5.13 (Cercle et disque)

Soit A un point du plan complexe d'affixe $a \in \mathbb{C}$, et $r \geq 0$. L'ensemble

$$C(a,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$$

correspond au cercle de centre A et de rayon r. L'ensemble

$$D(a,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$$

correspond au disque de centre A et de rayon r.

4 Forme trigonométrique

4.1 Nombres complexes de module 1

Définition 5.14

On appelle cercle unité ou cercle trigonométrique l'ensemble des complexes de module 1, qu'on note :

$$\mathbb{U} := C(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Remarque. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

Pour tous $u, v \in \mathbb{U}$, on a $\dfrac{1}{u} \in \mathbb{U}$ et $uv \in \mathbb{U}$.

4.2 L'exponentielle $e^{i\theta}$

Définition 5.15 (Notation exponentielle)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On introduit la notation

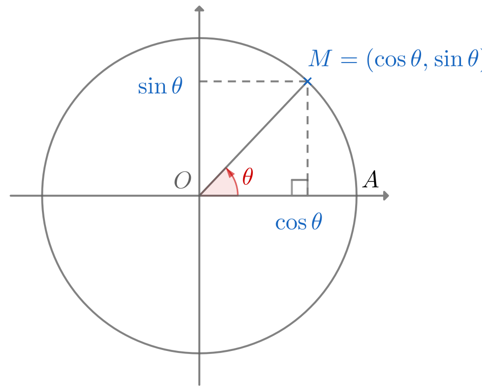
$$\boxed{e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta}$$

Propriété 5.16

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $|e^{i\theta}| = 1$ donc en particulier $e^{i\theta} \neq 0$ et $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

Démonstration. En effet, $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$. □

On se place sur le plan complexe. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et M le point d'affixe $e^{i\theta}$.



Alors M est sur le cercle trigonométrique, et θ correspond à l'angle (orienté) avec l'axe des abscisses.

Réciproquement, tout point du cercle trigonométrique peut se représenter par un affixe de la forme $e^{i\theta}$:

$$\mathbb{U} = \left\{ e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple 4.

$$e^{i0} = \dots \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = \dots \qquad e^{i\pi} = \dots \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} = \dots$$

Propriété 5.17 (Propriétés de l'exponentielle complexe)

Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

1. $e^{i2k\pi} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \, [2\pi]$.
3. **Relation fondamentale** :
$$\boxed{e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}}$$
4. $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
5. $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$

Démonstration. On montre seulement la relation fondamentale. Les complexes $e^{i(\theta+\theta')}$ et $e^{i\theta}e^{i\theta'}$ sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes parties réelle et imaginaire. Or,

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Re}(e^{i(\theta+\theta')}) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}e^{i\theta'}) \\
\iff & \cos(\theta+\theta') = \mathrm{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)\right] \\
\iff & \cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'
\end{aligned}$$

et cette dernière assertion est vraie (cf formules de trigonométrie). De même,

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Im}(e^{i(\theta+\theta')}) = \mathrm{Im}(e^{i\theta}e^{i\theta'}) \\
\iff & \dots \\
\iff & \sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'
\end{aligned}$$

qui est vraie également. Ainsi, ces deux nombres complexes ont les mêmes parties réelles et imaginaires et sont donc égaux. $\square$

Propriété 5.18 (Formules d'Euler et de Moivre)

- **(Formules d'Euler)** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- **(Formule de Moivre)** Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

4.3 Application à la trigonométrie

Méthode (Linéarisation)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on veut transformer $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ en somme de termes $\cos(k\theta)$ et/ou $\sin(k\theta)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

- Par les formules d'Euler, on exprime $\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$, idem si c'est $\sin^n t$.
- On développe avec la formule du binôme de Newton
- On regroupe les exponentielles conjuguées ($e^{ik\theta}$ avec $e^{-ik\theta}$), en appliquant Euler dans l'autre sens.

Exemple 5. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^3\theta$.

Méthode (Délinéarisation)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on veut transformer $\cos(nt)$ ou $\sin(nt)$ en somme de termes $\cos^k t$ et/ou $\sin^k t$ avec $k \in \mathbb{N}$

- On utilise la formule de Moivre : $\cos(nt) = \mathrm{Re}\left(e^{int}\right) = \mathrm{Re}\left((\cos t + i\sin t)^n\right)$, idem si c'est $\sin(nt)$.
- On développe $(\cos t + i\sin t)^n$ avec la formule du binôme de Newton
- On identifie la partie réelle (si on veut $\cos(nt)$) ou la partie imaginaire (si on veut $\sin(nt)$).
- On transforme éventuellement les sin et cos avec $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Exemple 6. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(4t)$ en fonction de $\cos t$.

Méthode (Angle moitié)

Soit a, b deux réels. On veut factoriser $e^{ia} \pm e^{ib}$.

- $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$
- $e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2i\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$

Exemple 7. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.

4.4 Argument, forme trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$. Alors $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1. Donc, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$$

Définition 5.19 (Forme trigonométrique)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé UN argument de z. L'écriture

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

est appelée forme trigonométrique (ou forme exponentielle) de z.

Par convention, on considère que $z = 0$ n'admet pas de forme trigonométrique.

Remarque. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si on a

$$z = re^{i\theta} \qquad \text{avec } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

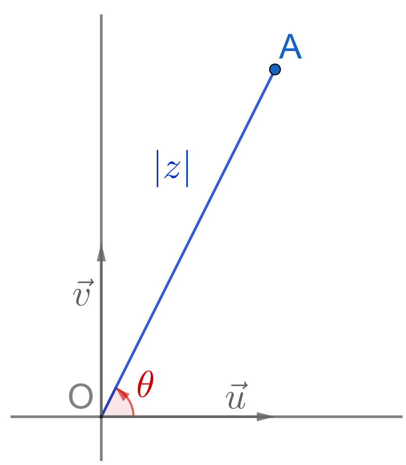
alors $r = |z|$ et θ est un argument de z : cette écriture est la forme trigonométrique de z (qui est non nul car $r > 0$).

Exemple 8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Mettre sous forme trigonométrique $z = -e^{i\theta}$ et $u = i\,e^{i\theta}$.

Si A est un point d'affixe $z \neq 0$, l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ est un argument de z.

L'argument de z n'est défini qu'à 2π près : si θ est un argument, alors $\theta + 2k\pi$ l'est aussi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, la forme trigonométrique *n'a pas une écriture unique* : si $z = re^{i\theta}$ alors nécessairement $r = |z| > 0$ mais θ n'est défini que modulo 2π.



Définition 5.20

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note $\arg z$ un argument quelconque de z. Ce nombre n'est défini qu'à 2π près.

Cependant, il existe un unique argument de z dans $]-\pi, \pi]$. On l'appelle l'argument principal de z.

Comme l'argument n'est défini qu'à 2π près, cela n'a pas de sens d'écrire " $\arg z = \arg z'$ " : au lieu du égal, on écrira "congru modulo 2π".

Exemple 9.

- $\arg 1 \equiv \ldots\ldots\ [2\pi]$
- $\arg i \equiv \ldots\ldots\ [2\pi]$
- $\arg(-i) \equiv \ldots\ldots\ [2\pi]$

4.5 Propriétés de l'argument

Propriété 5.21 (Calculs avec arg)

Soit $u, v \in \mathbb{C}$. Alors

- $\arg \overline{u} \equiv -\arg u\ [2\pi]$
- $\arg(uv) \equiv \arg u + \arg v\ [2\pi]$
- $\arg \dfrac{u}{v} \equiv \arg u - \arg v\ [2\pi]$
- $\arg(u^n) \equiv n \arg u\ [2\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. En utilisant les propriétés de $e^{i\theta}$. □

Propriété 5.22 (Caractérisation des réels et imaginaires purs par l'argument)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- $\arg z \equiv 0\ [2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_+^*$
- $\arg z \equiv 0\ [\pi] \iff z \in \mathbb{R}^*$
- $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff z \in i\mathbb{R}^*$

4.6 Calculs en forme trigonométrique

Propriété 5.23 (Égalité sous forme trigo)

Soit $re^{i\theta}$ et $Re^{i\varphi}$ deux complexes non nuls sous forme trigonométrique.

$$re^{i\theta} = Re^{i\varphi} \iff \begin{cases} r = R \\ \theta \equiv \varphi\ [2\pi] \end{cases}$$

Propriété 5.24 (Calculs sous forme trigo)

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux complexes (non nuls) sous forme trigonométrique. Alors

1. $zz' = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$
2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
3. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = r^n e^{in\theta}$

De manière générale, la forme trigonométrique marche bien avec les calculs de produits, divisions et puissances. Par contre elle est très mauvaise pour les additions et soustractions : mieux vaut passer par la forme algébrique.

Méthode (Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique)

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ un complexe non nul sous forme algébrique dont on cherche la forme trigonométrique.

1. On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. On doit déterminer un argument de z. On factorise par $|z|$:
$$z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$$
puis on cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{|z|} = \cos\theta$ et $\frac{b}{|z|} = \sin\theta$.
3. Alors on peut écrire $z = |z| e^{i\theta}$, qui est la forme trigonométrique recherchée.

Pour passer de la forme trigonométrique à algébrique, c'est encore plus simple : il suffit de remplacer $e^{i\theta}$ par $\cos\theta + i\sin\theta$ et de regrouper parties réelle et imaginaire.

Exemple 10. Mettre sous forme trigonométrique
$$z = \sqrt{3} - i$$

On peut adopter une technique similaire pour la méthode suivante :

Méthode (Transfomer $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t-\varphi)$)

Soit $a, b, t \in \mathbb{R}$. On veut réécrire $a\cos t + b\sin t$ sous la forme $A\cos(t-\varphi)$ avec $A > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On suppose $(a,b) \neq (0,0)$, sinon c'est trivial.

1. Écrire $a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t \right)$.
2. Déterminer φ tel que $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
3. Factoriser la parenthèse en $\cos(t-\varphi)$, et ainsi $A = \sqrt{a^2+b^2}$.

Exemple 11. Mettre $\cos t + \sin t$ sous la forme $A\cos(t-\varphi)$.

Remarque. C'est assez utile en physique et en SI : A est appelé l'amplitude et φ la phase.

5 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

5.1 Racine carrée d'un nombre complexe

Définition 5.25

Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de ω si $z^2 = \omega$.

Théorème 5.26

Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Si $\omega \neq 0$, alors ω admet exactement deux racines carrées. Si z est une racine carrée, l'autre est $-z$.
Si $\omega = 0$, alors ω a une unique racine carrée : le complexe 0.

Démonstration. La preuve est basée sur la méthode ci-dessous. □

Méthode (Calcul d'une racine carrée)

Étant donné $\omega \in \mathbb{C}^*$, on cherche z tel que $z^2 = \omega$.

- Sous forme trigonométrique : si $\omega = re^{i\theta}$, alors les racines sont simplement

$$\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$$

- Sous forme algébrique : si ω est sous forme algébrique, on pose $z = a + ib$, puis comme $\omega = z^2$, on peut écrire

$$\begin{cases} |\omega| = |z|^2 \\ \mathrm{Re}\,\omega = \mathrm{Re}(z^2) \\ \mathrm{Im}\,\omega = \mathrm{Im}(z^2) \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} |\omega| = a^2 + b^2 \\ \mathrm{Re}\,\omega = a^2 - b^2 \\ \mathrm{Im}\,\omega = 2ab \end{cases}$$

  Les deux premières lignes déterminent les valeurs a^2 et b^2. Ainsi, a et b sont déterminés au signe près : $a = \pm|a|$ et $b = \pm|b|$. Ensuite, on utilise la dernière ligne $\mathrm{Im}\,\omega = 2ab$ qui donne le signe de ab. Si on trouve un couple (a, b) qui vérifie cette condition de signe, alors

$$z = a + ib \qquad \text{et} \qquad -z = -a - ib$$

  sont les deux racines carrées qu'on recherche.

Lorsque c'est possible, il vaut mieux toujours passer par la forme trigonométrique pour trouver les racines carrées.

Exemple 12. Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $z = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et de $z = 8 - 6i$.

Remarque. Si $z \in \mathbb{C}$ alors l'écriture $\sqrt{z}$ n'est possible QUE SI $z \in \mathbb{R}_+$. On ne peut absolument pas écrire "$\sqrt{-1}$" ou "$\sqrt{i}$".
Cependant, si $x \in \mathbb{R}_-^*$, les racines carrées de x sont données par $i\sqrt{-x}$ et $-i\sqrt{-x}$.

5.2 Équations du second degré à coefficients complexes

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = az^2 + bz + c$ le trinôme du second degré associé à cette équation. On cherche donc les racines complexes de P.

Théorème 5.27

On cherche les racines de $P(z) := az^2 + bz + c$. On introduit le nombre *complexe*

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \in \mathbb{C}$$

appelé discriminant du trinôme P.

- Si $\Delta \neq 0$, alors P a deux racines distinctes :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

  où δ est une racine carrée du complexe Δ (l'autre étant $-\delta$). Dans ce cas, on a

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$

- Si $\Delta = 0$, alors P a une unique racine (double) : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$. Dans ce cas, on a

$$P(z) = a(z - z_0)^2$$

Remarque (Cas particuliers pour Δ).

- Si $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$, alors on peut prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$: comme dans le cas réel, on a bien deux racines (qui peuvent être complexes)
- Si $\Delta \in \mathbb{R}_-^*$, alors on peut prendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$: il y a malgré tout deux racines.
- Si $\Delta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors il ne faut surtout pas écrire $\Delta > \ldots$ ou $\Delta < \ldots$: **il n'y a pas d'inégalité dans les complexes (non réels) !**

Exemple 13. Résoudre $z^2 + (2+i)z - \dfrac{5}{4} + \dfrac{5}{2}i = 0$.

Propriété 5.28 (Somme et produit des racines)

Avec les mêmes notations :

1. On note z_1 et z_2 les deux racines de $az^2+bz+c=0$, éventuellement confondues dans le cas $\Delta=0$. Alors
$$z_1+z_2=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1z_2=\frac{c}{a}.$$
2. Soit $s,p\in\mathbb{C}$. Les solutions complexes du système
$$\begin{cases} z_1+z_2=s \\ z_1z_2=p \end{cases}$$
sont exactement les solutions de l'équation $z^2-sz+p=0$.

Propriété 5.29 (Factorisation et racine)

Soit P un polynome à coefficients complexes de degré $n\geq 1$. Si P admet a pour racine, càd si $P(a)=0$, alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que
$$P(z)=(z-a)Q(z)$$

Pour trouver Q, on peut procéder par identification.

Exemple 14. Résoudre $z^3+2z^2+2z+1=0$.

5.3 Racines n-ième

Définition 5.30

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de ω tout nombre complexe z tel que

$$z^n = \omega$$

Définition 5.31

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un complexe z vérifiant $z^n = 1$ est appelé racine n-ième de l'unité. On note

$$\mathbb{U}_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Propriété 5.32 (Détermination de $\mathbb{U}_n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_n &= \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \\ &= \left\{ e^{i0}, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, e^{i\frac{6\pi}{n,}}, \dots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} \right\} \end{aligned}$$

La famille de complexes $(e^{\frac{2ik\pi}{n}})_{1 \leq k \leq n}$ regroupe exactement toutes les racines n-ième de l'unité.

Exemple 15.
- 1 est toujours une racine n-ième de l'unité quel que soit n.
- $i^4 = 1$ donc i est une racine 4-ième de l'unité.
- $i^8 = i^4 i^4 = 1$ donc i est aussi une racine 8-ième de l'unité.

Exemple 16. Résoudre $z^3 = 1$.

Théorème 5.33 (Calcul d'une racine n-ième)

Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $z^n = \omega$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement n solutions distinctes, appelées racines n-ièmes de ω.
Si $\omega = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$z^n = \omega = re^{i\theta} \iff \left(\exists k \in [\![0, n-1]\!] \qquad z = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad = \quad r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

Exemple 17. Résoudre $z^3 = 27i$.

5.4 Exponentielle complexe

Définition 5.34

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le complexe exponentielle de z, noté e^z ou $\exp(z)$ est défini par

$$e^z = e^{\mathrm{Re} z} e^{i \,\mathrm{Im} z}$$

La forme trigonométrique e^z est donnée par $|e^z| = e^{\mathrm{Re} z}$ et $\arg(e^z) = \mathrm{Im} z$.

Propriété 5.35 (Propriétés d'exponentielle complexe)

Pour tous $z, u, v \in \mathbb{C}$,

1. $e^z \in \mathbb{C}^*$
2. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.
3. $$e^{u+v} = e^u e^v \quad \text{et} \quad e^{u-v} = \frac{e^u}{e^v}$$
4. $$\begin{aligned} e^u = e^v &\iff (\mathrm{Re} u = \mathrm{Re} v \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} u \equiv \mathrm{Im} v \ [2\pi]) \\ &\iff (\exists k \in \mathbb{Z} \quad u - v = i \times 2k\pi) \end{aligned}$$

Exemple 18. Résoudre $e^z = \sqrt{3} + i$.

6 Géométrie

On se place dans un plan complexe.

6.1 Alignement, orthogonalité de vecteurs

Propriété 5.36

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $u, v \in \mathbb{C}^*$.

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg\left(\frac{v}{u}\right) \equiv \arg v - \arg u \; [2\pi]$$

En particulier, si A, B, C, D sont quatre points distincts du plan d'affixes a, b, c, d, alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \; [2\pi]$$

Démonstration. Il suffit de faire un dessin. Pour le cas particulier, prendre $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ d'affixe $b-a$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ d'affixe $d-c$ (ces deux affixes sont non nulles car A, B, C, D sont supposés distincts). □

Propriété 5.37

Soit A, B, C trois points distincts du plan d'affixes a, b, c.

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ sont alignés } &\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0 \; [\pi] \\ &\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AB) \text{ et } (AC) \text{ sont perpendiculaires en } A &\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi] \\ &\iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

Remarque. Dans un exercice de géométrie complexe, un calcul du quotient du type $\dfrac{c-a}{b-a}$ est souvent le coeur du problème.

Exemple 19. Soit A, B, C des points d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = 2i$ et $c = 2 - 2i$. Donner la nature du triangle ABC.

6.2 Transformations du plan

Sera vu ultérieurement.